Universidad Nacional Experimental del Táchira.
Departamento de Ingeniería Electrónica.
Núcleo de Instrumentación y Control.
Profesor: Tito González.
San Cristóbal, Jueves 15 de Octubre del 2009.

EJERCICIOS RESUELTOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ECUACIONES DIFERENCIALES

INTRODUCCION.

A continuación se obtiene la solución de tres ecuaciones diferenciales por medio de la utilización de transformada directa e inversa de Laplace con el objeto de establecer las técnicas básicas para la aplicación de la herramienta en esta clase de problemas.

Los ejercicios se inician hallando la solución completa o respuesta total, y posteriormente se desarrollan los conceptos de respuesta libre, respuesta forzada, la respuesta total como suma algebraica de la respuesta libre y la respuesta forzada, para finalmente desarrollar el concepto de función de transferencia.

Por otra parte, cada uno de los ejercicios se acompaña de sus respectivas gráficas tanto en el dominio de la frecuencia compleja “S” como en el dominio del tiempo, para mostrar el significado y valores característicos de la transformación, en particular la relación que hay entre la posición de los polos y el comportamiento en tiempo.

Estos gráficos, se realizaron por medio de scripts en Matlab versión 5.3, los cuales están a disposición del publico en otro apartado, a objeto de que el interesado en el área experimente con la modificación de los parámetros que se encuentran identificados para tal fin al inicio del script.

Cada ejercicio se encuentra identificado en su inicio con un nombre código como: **TLEDE01**, el cual significa: **T**ransformada de **L**aplace de **E**cuaciones **D**iferenciales **E**jercicio **01**, de manera tal de no perder el enlace entre el ejercicio resuelto y la codificación en Matlab.

Ejercicio: **TLEDE01**

Obtenga la ecuación que es solución de la siguiente ecuación diferencial por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades.

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 4g(t) = sen(4t) \;\; con \;\; g(0) = 0 \;\; y \;\; g'(0) = \tfrac{1}{5}$$

Solución:

Aplicando Transformada Directa de Laplace

$$\mathscr{L}\left\{D^2 g(t) + 4g(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{sen(4t)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{D^2 g(t)\right\} + 4\mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{sen(4t)\right\}$$

$$\left\{S^2 G(s) - Sg(0) - g'(0)\right\} + 4\left\{G(s)\right\} = \left\{\frac{4}{\left(S^2 + 4^2\right)}\right\}$$

$$S^2 G(s) - 0 - \tfrac{1}{5} + 4G(s) = \frac{4}{\left(S^2 + 4^2\right)}$$

$$G(s)\left(S^2 + 4\right) - \tfrac{1}{5} = \frac{4}{\left(S^2 + 4^2\right)}$$

$$G(s)\left(S^2 + 4\right) = \frac{4}{\left(S^2 + 4^2\right)} + \frac{1}{5} = \frac{20 + \left(S^2 + 4^2\right)}{5\left(S^2 + 4^2\right)} = \frac{S^2 + 36}{5\left(S^2 + 4^2\right)}$$

$$G(s) = \frac{\left(S^2 + 6^2\right)}{5\left(S^2 + 2^2\right)\left(S^2 + 4^2\right)} \;\Rightarrow\; \underline{G(s) = \frac{\tfrac{1}{5}\left(S^2 + 6^2\right)}{\left(S^2 + 2^2\right)\left(S^2 + 4^2\right)}}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{5}\left(S^2 + 6^2\right)}{\left(S^2 + 2^2\right)\left(S^2 + 4^2\right)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{5}\left[(S+0)^2 + 6^2\right]}{\left[(S+0)^2 + 2^2\right]\left[(S+0)^2 + 4^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M_1\angle\varphi_1}{\left[(S+0)^2+2^2\right]}+\frac{M_2\angle\varphi_2}{\left[(S+0)^2+4^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M_1\angle\varphi_1}{\left[\left(S+\sigma_1\right)^2+\omega_1{}^2\right]}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M_2\angle\varphi_2}{\left[\left(S+\sigma_2\right)^2+\omega_2{}^2\right]}\right\}$$

$$\underline{\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{M_1}{\omega_1}e^{-\sigma_1\cdot t}sen\left(\omega_1\cdot t+\varphi_1\right)+\frac{M_2}{\omega_2}e^{-\sigma_2\cdot t}sen\left(\omega_2\cdot t+\varphi_2\right)}\ \Bigg|_{\substack{forma\ de\ la\\ respuesta}}$$

Hallando los coeficientes

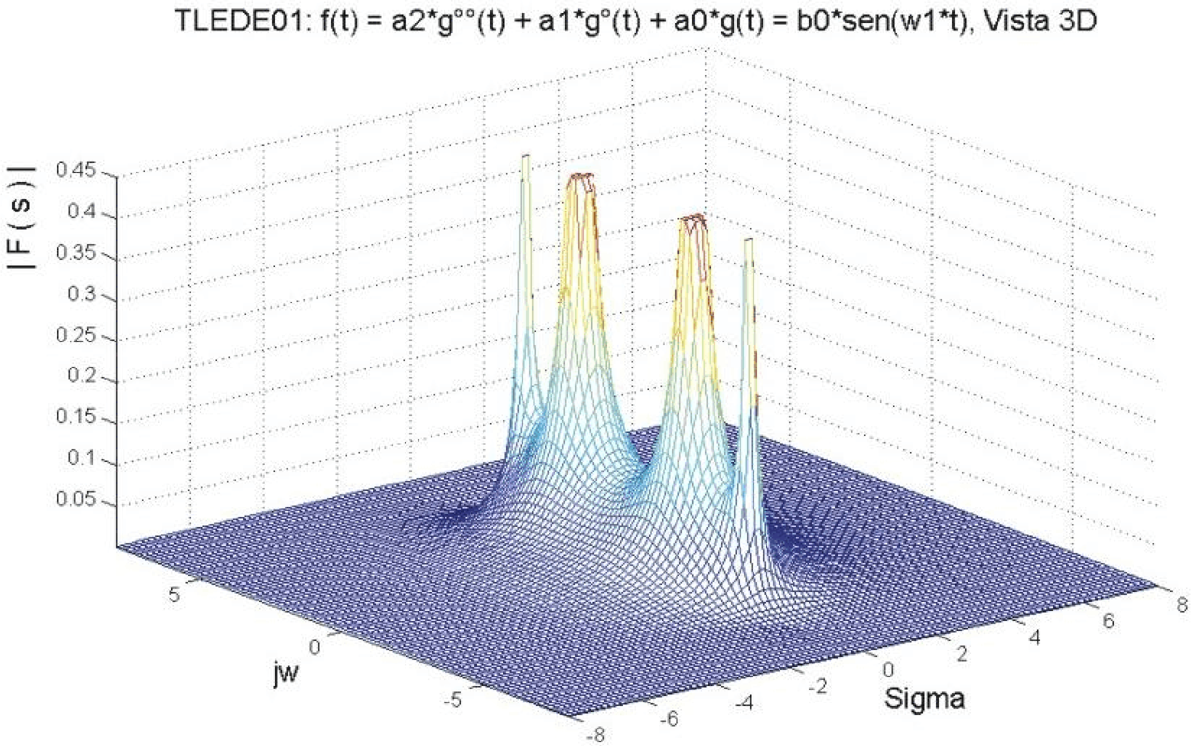
$$M_1\angle\varphi_1 = \left\{G(s)\cdot\left[\left(S+\sigma_1\right)^2+\omega_1^2\right]\right\}_{S=-\sigma_1+j\omega_1} = \frac{\frac{1}{5}\left(S^2+36\right)}{\left(S^2+16\right)}\Bigg|_{S=0+2j} = \underline{\frac{8}{15} = 0.5333\angle 0 = M_1\angle\varphi_1}$$

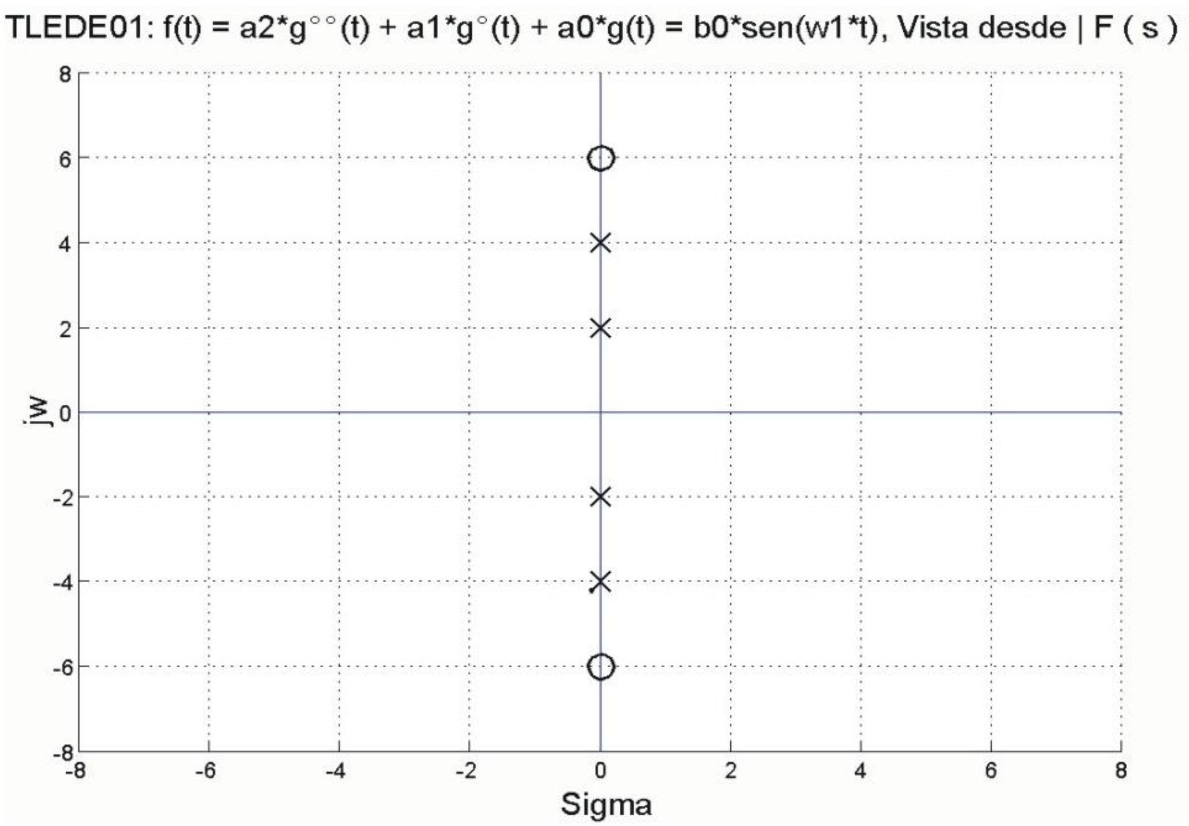
$$M_2\angle\varphi_2 = \left\{G(s)\cdot\left[\left(S+\sigma_2\right)^2+\omega_2^2\right]\right\}_{S=-\sigma_2+j\omega_2} = \frac{\frac{1}{5}\left(S^2+36\right)}{\left(S^2+4\right)}\Bigg|_{S=0+4j} = \underline{-\frac{1}{3} = 0.3333\angle\pi = M_2\angle\varphi_2}$$

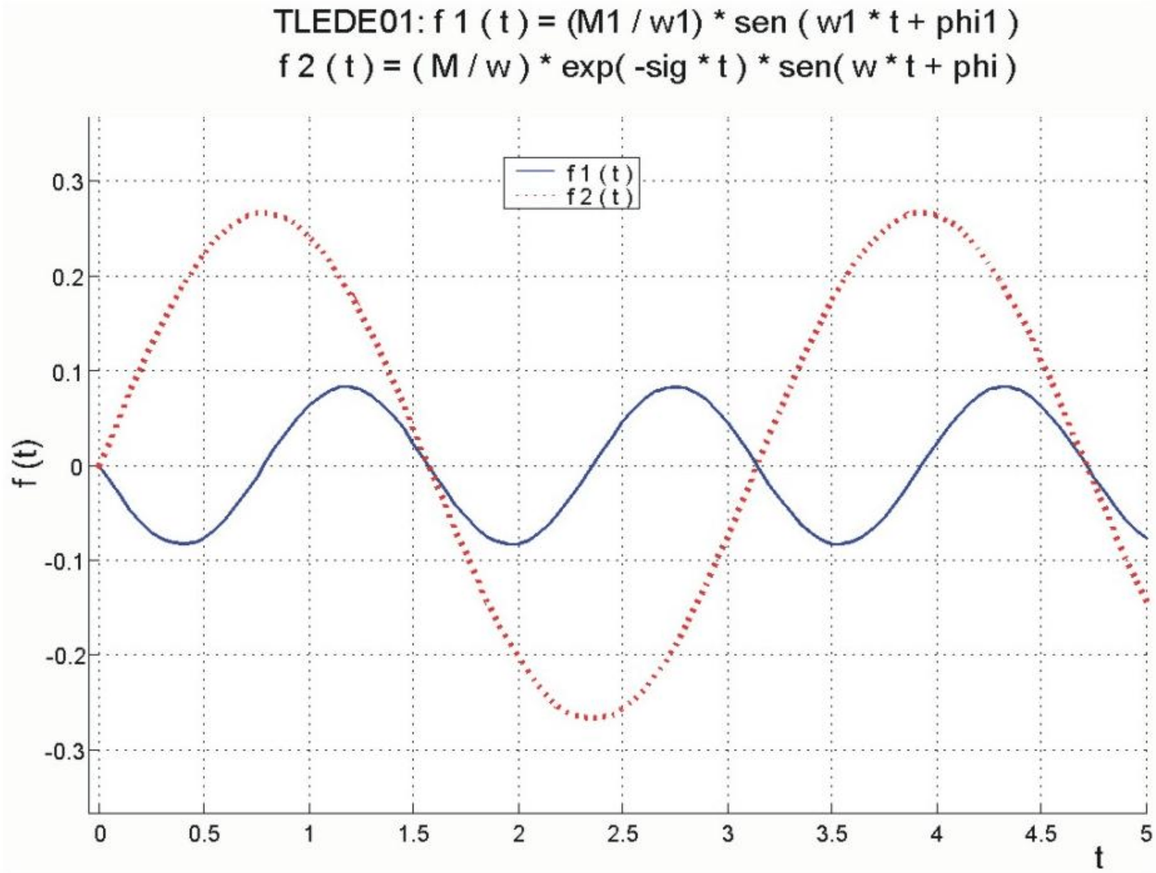
sustituyendo en la forma de la respuesta

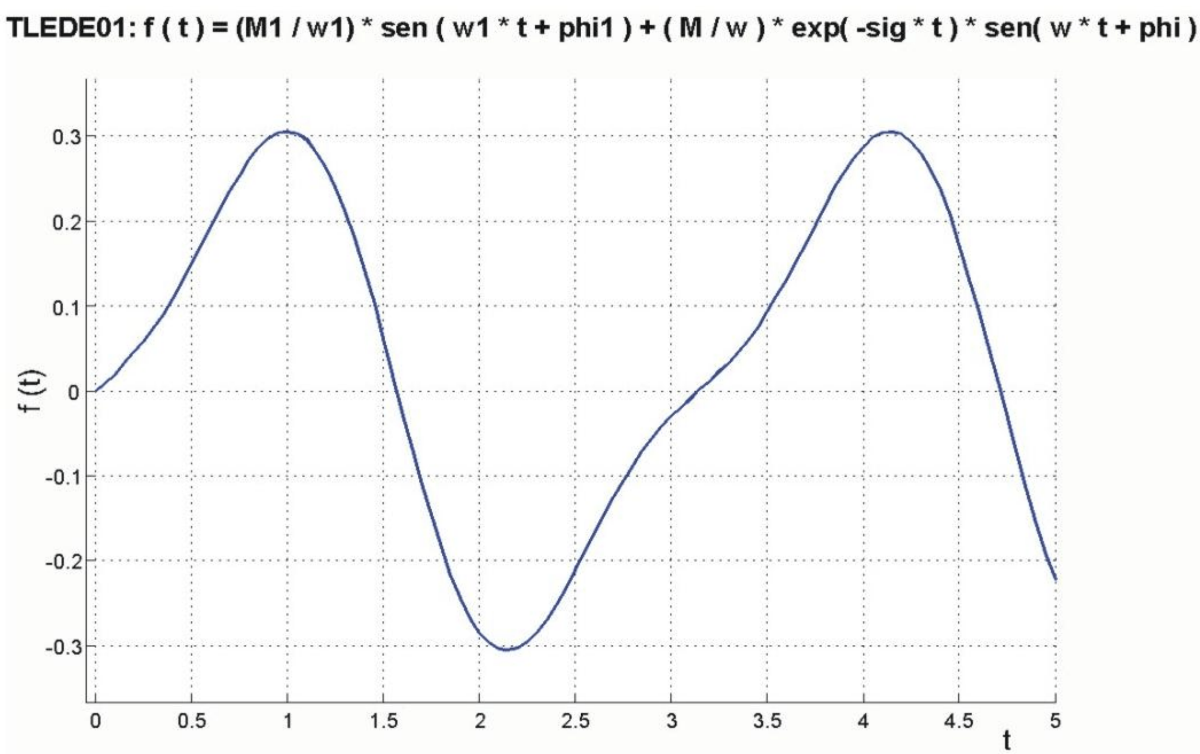
$$\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \frac{0.5333}{2}e^{0\cdot t}sen(2t+0)+\frac{(-0.3333)}{4}e^{0\cdot t}sen(4t+\pi)$$

$$\underline{\underline{\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = 0.2667sen(2t)+0.0834sen(4t+\pi)}}$$


TLEDE01: f(t) = a2*g°°(t) + a1*g°(t) + a0*g(t) = b0*sen(w1*t), Vista 3D
| F (s) |
jw
Sigma


TLEDE01: f(t) = a2*g°°(t) + a1*g°(t) + a0*g(t) = b0*sen(w1*t), Vista desde | F (s) |
jw
Sigma


TLEDE01: f 1 (t) = (M1 / w1) * sen (w1 * t + phi1)
f 2 (t) = (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f 1 (t)
f 2 (t)
f (t)
t
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


TLEDE01: f (t) = (M1 / w1) * sen (w1 * t + phi1) + (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f (t)
t
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Ejercicio: **TLEDE02**

Obtenga la ecuación que es solución de la siguiente ecuación diferencial por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades.

$$D^2h(t) - 2Dh(t) + 10h(t) = e^{-2\cdot t} \quad con \quad h(0) = 0 \quad y \quad h'(0) = 1/2$$

Solución:

Aplicando Transformada Directa de Laplace.

$$\mathscr{L}\{D''h(t)\} - 2\mathscr{L}\{D'h(t)\} + 10\mathscr{L}\{h(t)\} = \mathscr{L}\{e^{-2\cdot t}\}$$

$$\{S^2H(s) - Sh(0) - h'(0)\} - 2\{SH(s) - h(0)\} + 10\{H(s)\} = \left\{\frac{1}{(S+2)}\right\}$$

$$S^2H(s) - \tfrac{1}{2} - 2SH(s) + 10H(s) = \frac{1}{(S+2)}$$

$$H(s)\left[S^2 - 2S + 10\right] - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{(S+2)}$$

$$H(s)\left[S^2 - 2S + 10\right] = \frac{1}{(S+2)} + \frac{1}{2} = \frac{2 + (S+2)}{2(S+2)} = \frac{(S+4)}{2(S+2)}$$

$$\underline{H(s) = \frac{\tfrac{1}{2}(S+4)}{(S+2)\left(S^2 - 2S + 10\right)}}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace.

$$\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(S+4)}{(S+2)\left(S^2 - 2S + 10\right)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(S+4)}{(S+2)\left(S - 1 + 3j\right)\left(S - 1 - 3j\right)}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(S+4)}{(S+2)\left[(S-1)^2 + 3^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k1}{(S+2)} + \frac{M\angle\varphi}{\left[(S-1)^2+3^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k1}{(S+\sigma_1)}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M\angle\varphi}{\left[(S+\sigma_2)^2+\omega_2^2\right]}\right\}$$

$$\underline{\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = k1\cdot e^{-\sigma_1\cdot t} + \frac{M}{\omega_2}\cdot e^{-\sigma_2\cdot t}\cdot sen(\omega_2\cdot t+\varphi)} \quad \Bigg|\ \text{forma de la respuesta}$$

Hallando los Coeficientes

$$k1 = \left[H(s)\cdot(S+\sigma_1)\right]_{S=-\sigma_1} = \left[\frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S^2-2S+10)}\right]_{S=-2} = \left[\frac{\frac{1}{2}(-2+4)}{\left((-2)^2-2(-2)+10\right)}\right] = \underline{\frac{1}{18} = 0.0556 = k1}$$

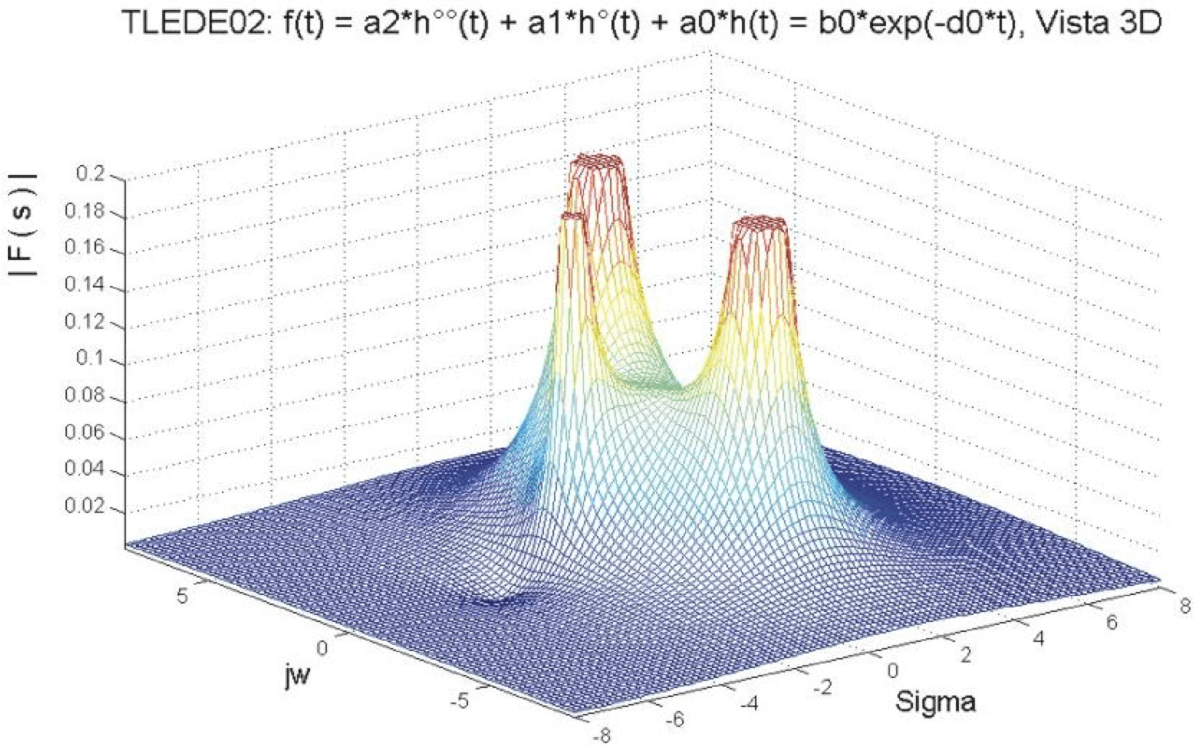
$$M\angle\varphi = \left\{H(s)\cdot\left[(S+\sigma_2)^2+\omega_2^2\right]\right\}_{S=-\sigma_2+j\omega_2} = \left[\frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S+2)}\right]_{S=1+3j} = \left[\frac{\frac{1}{2}(1+3j+4)}{(1+3j+2)}\right] = \frac{2.5+1.5j}{3+3j} = 0.667-0.1667j$$

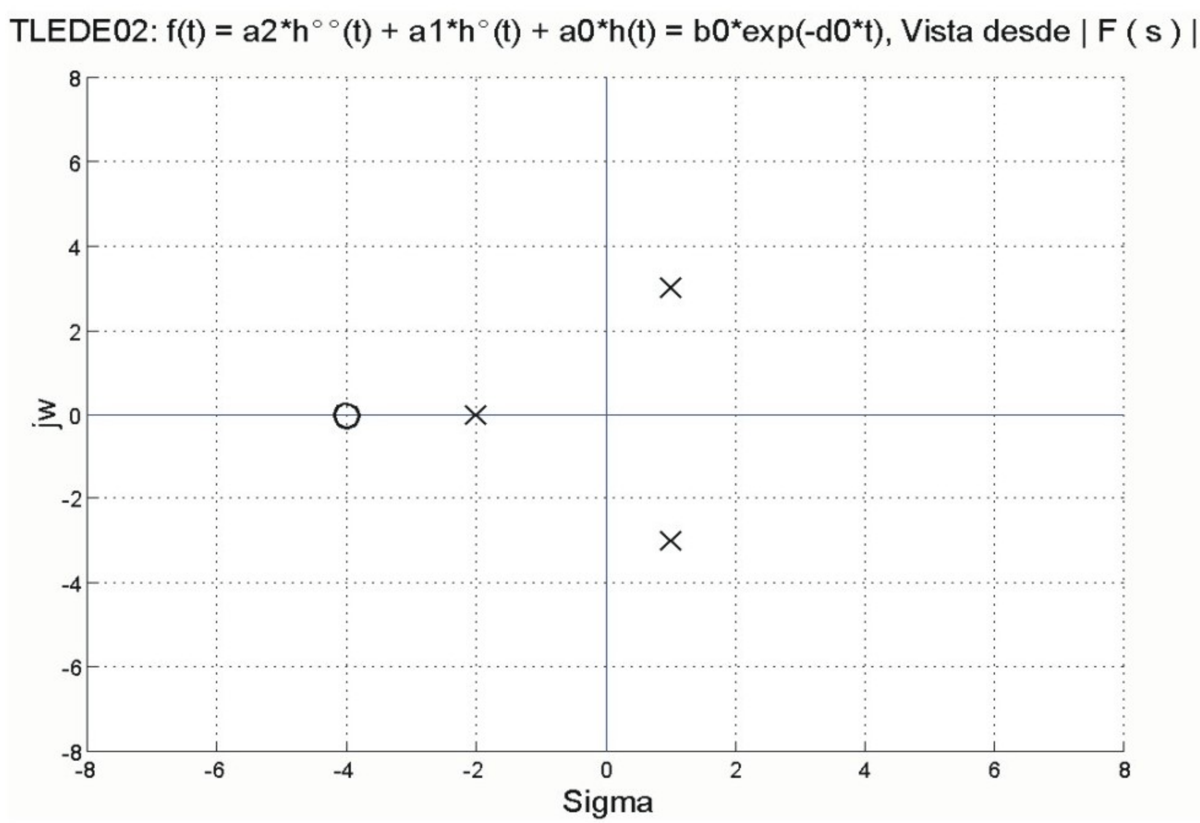
$$\underline{M\angle\varphi = 0.6872\angle-0.245}$$

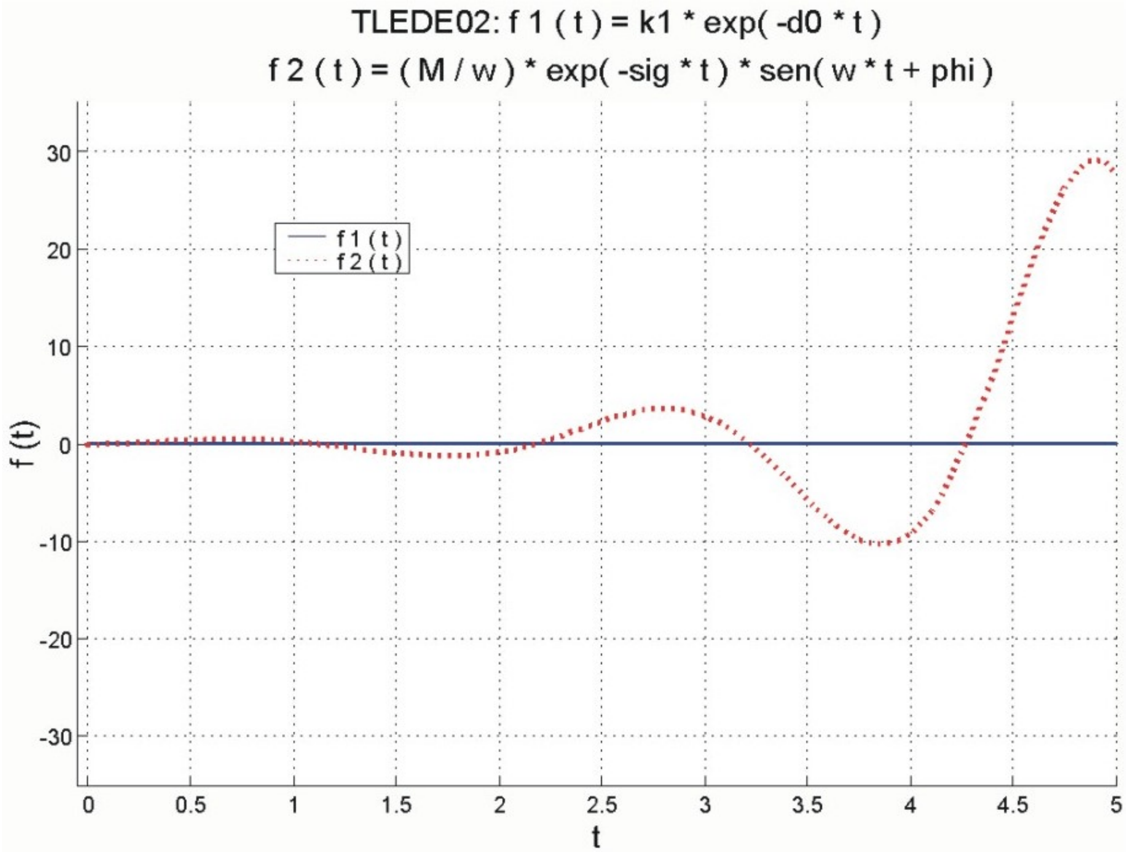
sustituyendo en la forma de la respuesta

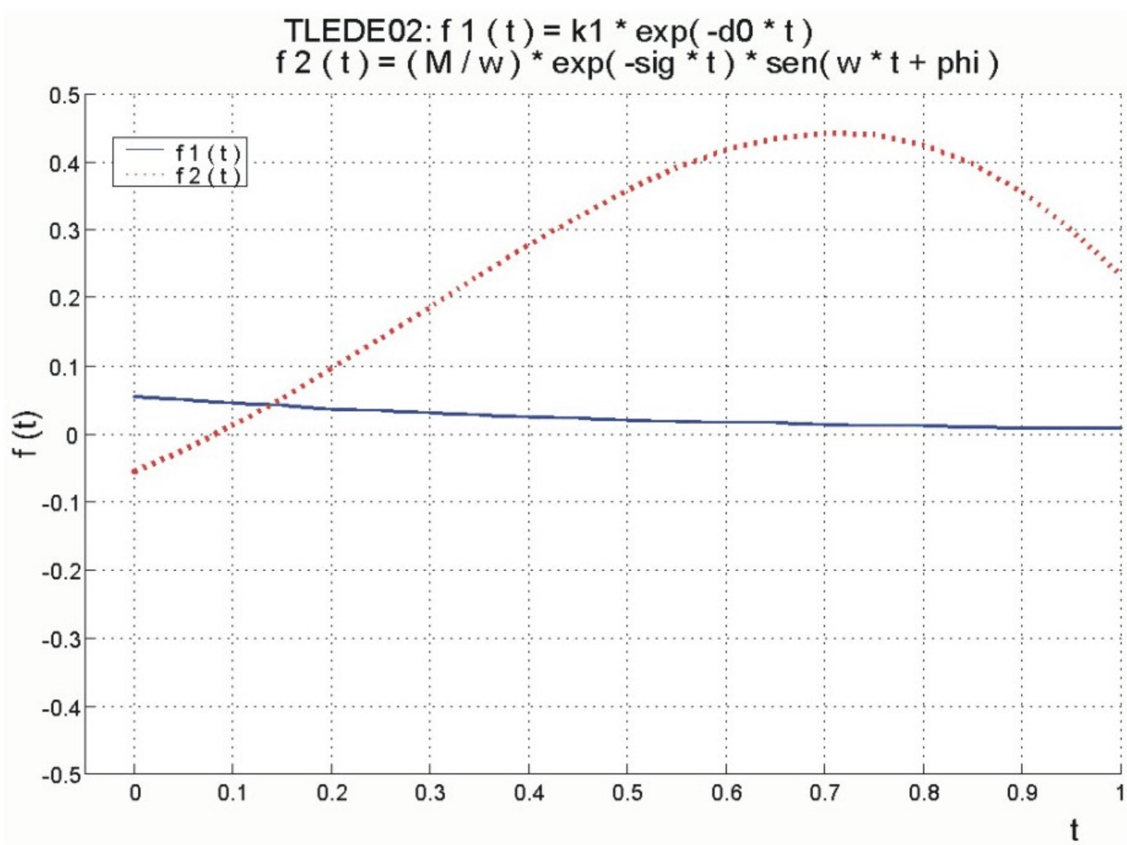
$$\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{18}e^{-2\cdot t} + \frac{0.6872}{3}e^{t}sen(3\cdot t-0.245)$$

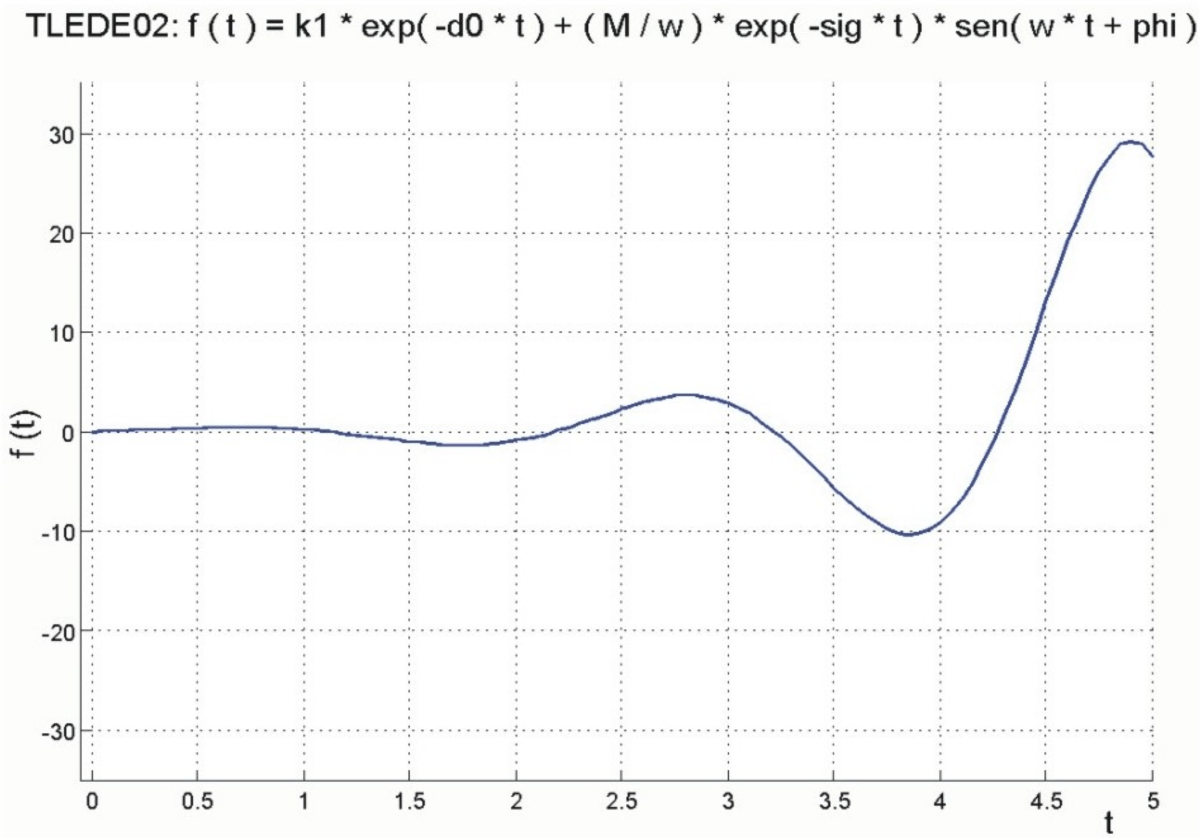
$$\underline{\underline{h(t) = 0.0556e^{-2\cdot t} + 0.2291\cdot e^{t}sen(3\cdot t-0.245)}}$$


TLEDE02: f(t) = a2*h°°(t) + a1*h°(t) + a0*h(t) = b0*exp(-d0*t), Vista 3D
| F (s) |
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
jw
5
0
-5
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
Sigma


TLEDE02: f(t) = a2*h°°(t) + a1*h°(t) + a0*h(t) = b0*exp(-d0*t), Vista desde | F (s) |
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
jw
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
Sigma


TLEDE02: f 1 (t) = k1 * exp(-d0 * t)
f 2 (t) = (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f 1 (t)
f 2 (t)
f (t)
t


TLEDE02: f 1 (t) = k1 * exp(-d0 * t)
f 2 (t) = (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f 1 (t)
f 2 (t)
f (t)
t


TLEDE02: f (t) = k1 * exp(-d0 * t) + (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f (t)
t
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Ejercicio: **TLEDE03**

Halle la respuesta total de la siguiente ecuación diferencial por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades.

$$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=x(t)\ \ con\ \ x(t)=u(t);\ \ y(0)=0;\ \ y'(0)=\tfrac{1}{2}$$

Solución:

Aplicando Transformada Directa de Laplace

$$\mathscr{L}\{y''(t)+2y'(t)+5y(t)\}=\mathscr{L}\{x(t)\}$$

$$\mathscr{L}\{y''(t)\}+\mathscr{L}\{2y'(t)\}+\mathscr{L}\{5y(t)\}=\mathscr{L}\{u(t)\}$$

$$\{S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)\}+2\{SY(s)-y(0)\}+5\{Y(s)\}=\left\{\frac{1}{S}\right\}$$

$$S^2Y(s)-\tfrac{1}{2}+2SY(s)+5Y(s)=\frac{1}{S}$$

$$Y(s)\left[S^2+2S+5\right]-\tfrac{1}{2}=\frac{1}{S}$$

$$Y(s)\left[S^2+2S+5\right]=\frac{1}{S}+\frac{1}{2}=\frac{2+S}{2S}=\frac{S+2}{2S}$$

$$Y(s)=\frac{(S+2)}{2S\left[S^2+2S+5\right]}\ \Rightarrow\ \underline{Y_T(s)=\frac{\tfrac{1}{2}(S+2)}{(S+0)\left[S^2+2S+5\right]}}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y_T(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(S+2)}{(S+0)\left[S^2+2S+5\right]}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(S+2)}{S(S+1+2j)(S+1-2j)}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y_T(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(S+2)}{S\left[(S+1)^2+2^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_T(s)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{S} + \frac{M\angle\varphi}{\left[(S+1)^2 + 2^2\right]}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{S}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M\angle\varphi}{\left[(S+1)^2 + 2^2\right]}\right\}$$

$$\underline{\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_T(s)\right\} = y_T(t) = k_1 u(t) + \frac{M}{2} e^{-1\cdot t} sen\left(2\cdot t + \varphi\right)} \;\Bigg|\; \textit{forma de la respuesta}$$

Hallando coeficientes

$$k_1 = \left\{Y_T(s)\cdot S\right\}_{S=0} = \left\{\frac{\frac{1}{2}(S+2)}{\left(S^2 + 2S + 5\right)}\right\}_{S=0} = \underline{\frac{1}{5} = 0.2 = k_1}$$

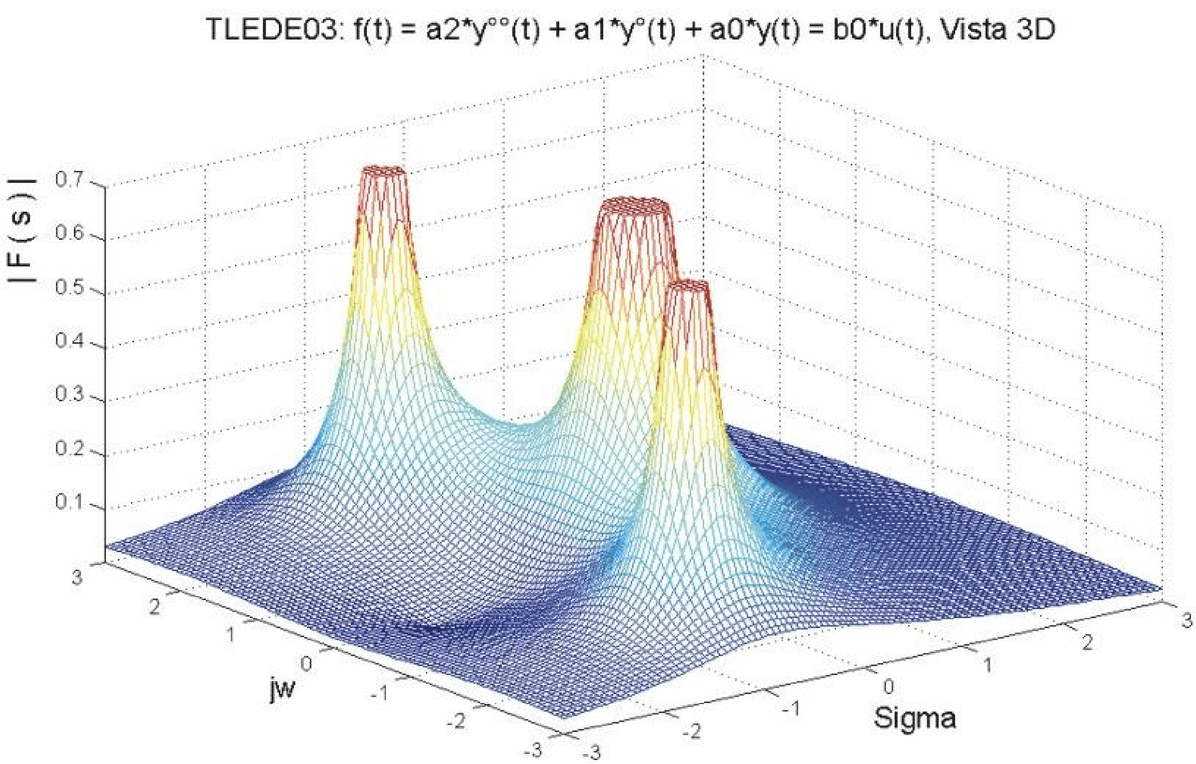
$$M\angle\varphi = \left\{Y_T(s)\cdot\left[(S+1)^2 + 2^2\right]\right\}_{S=-1+j2} = \left\{\frac{\frac{1}{2}(S+2)}{S}\right\}_{S=-1+j2} = \frac{\frac{1}{2}\left(-1+2j+2\right)}{-1+2j}$$

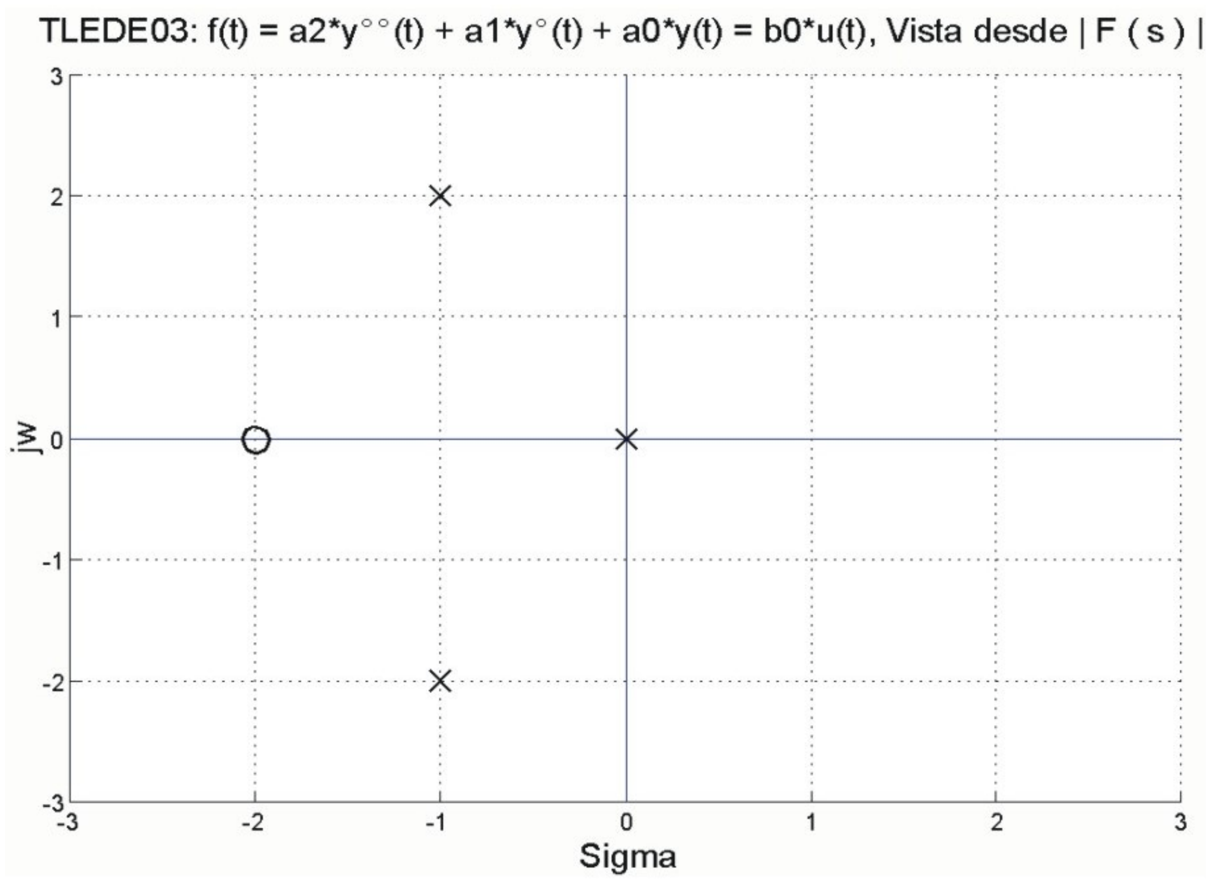
$$M\angle\varphi = \frac{\frac{1}{2}+j}{-1+2j} = 0.3 - 0.4j = \underline{\frac{1}{2}\angle -0.9273 = M\angle\varphi}$$

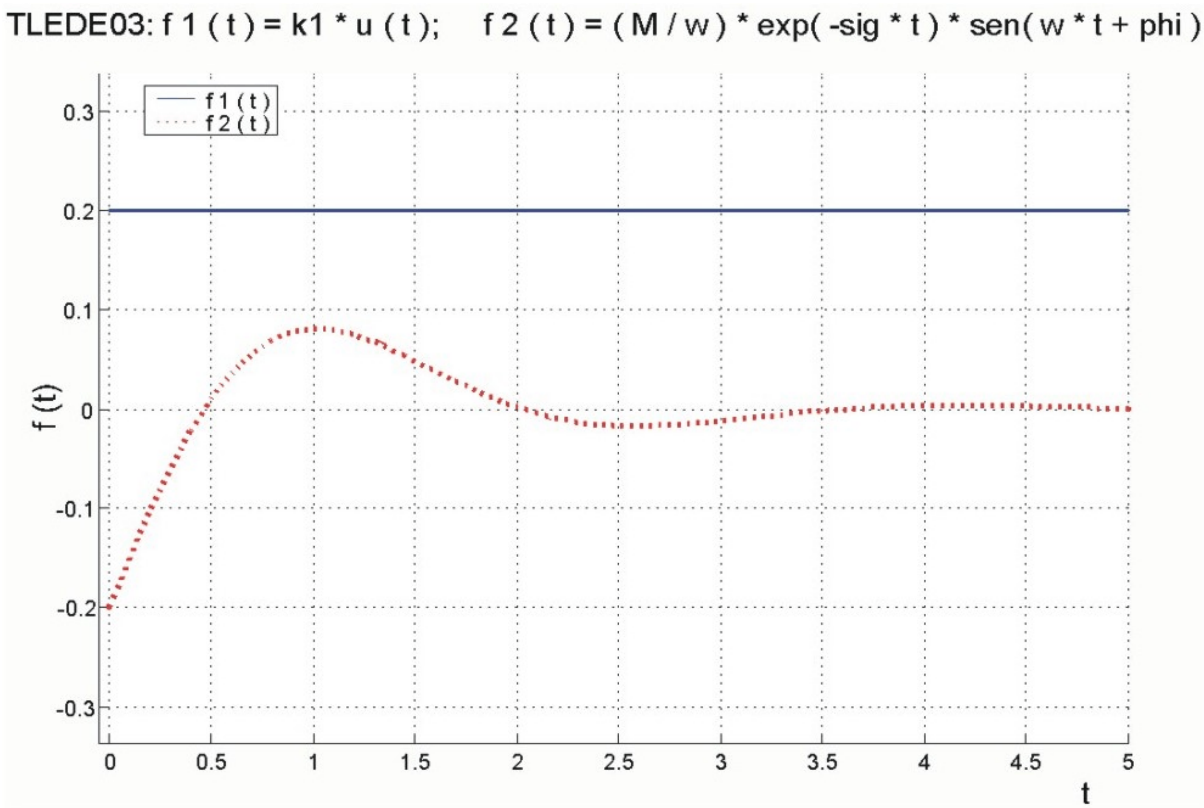
Sustituyendo en la forma de la respuesta

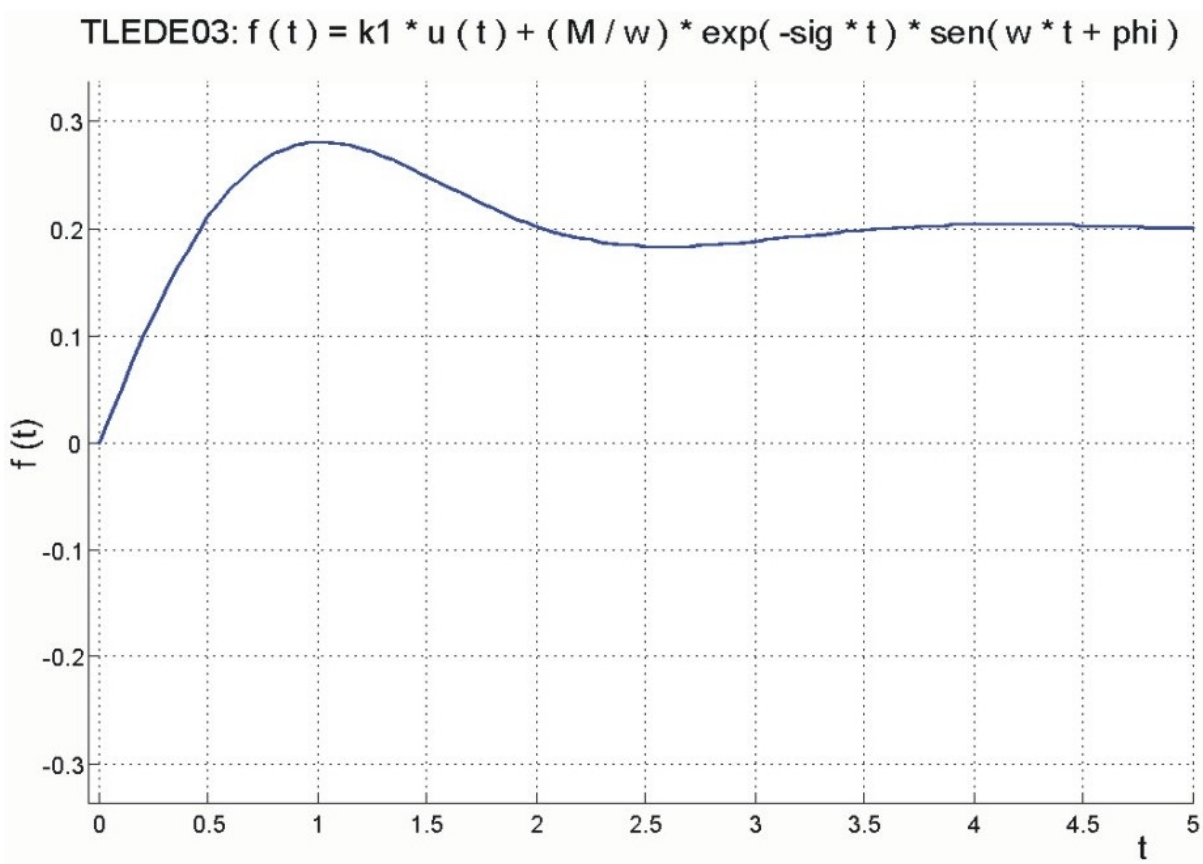
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_T(s)\right\} = y_T(t) = 0.2u(t) + \frac{1}{4} e^{-t} sen(2\cdot t - 0.9273)$$

$$\underline{\underline{\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_T(s)\right\} = y_T(t) = 0.2u(t) + 0.25 e^{-t} sen(2\cdot t - 0.9273)}}$$


TLEDE03: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista 3D
| F (s) |
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
jw
Sigma
3
2
1
0
-1
-2
-3


TLEDE03: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista desde | F (s) |
jw
Sigma
3
2
1
0
-1
-2
-3


TLEDE03: f 1 (t) = k1 * u (t); f 2 (t) = (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f 1 (t)
f 2 (t)
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
f (t)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t


TLEDE03: f (t) = k1 * u (t) + (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
f (t)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t

Ejercicio: **TLEDE04**

Halle la respuesta libre de la siguiente ecuación diferencial por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades.

$$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=x(t)\ \ con\ \ x(t)=u(t);\ \ y(0)=0;\ \ y'(0)=1/2$$

Solución:

Aplicando Transformada Directa de Laplace y considerando que $x(t)$ *y todas sus condiciones iniciales son cero*

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)+2y'(t)+5y(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\}+2\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\}+5\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{0\right\}$$

$$\left\{S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)\right\}+2\left\{SY(s)-y(0)\right\}+5\left\{Y(s)\right\}=0$$

$$S^2Y(s)-1/2+2SY(s)+5Y(s)=0$$

$$Y(s)\left[S^2+2S+5\right]-1/2=0$$

$$Y(s)\left[S^2+2S+5\right]=\frac{1}{2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{2\left[S^2+2S+5\right]}\ \Rightarrow\ \underline{Y_L(s)=\frac{1/2}{\left[S^2+2S+5\right]}}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_L(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{\left[S^2+2S+5\right]}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{(S+1+2j)(S+1-2j)}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_L(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{\left[(S+1)^2+2^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_L(s)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M\angle\varphi}{\left[(S+1)^2 + 2^2\right]}\right\}$$

$$\underline{\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_L(s)\right\} = y_L(t) = \frac{M}{2}e^{-1\cdot t}sen\left(2\cdot t+\varphi\right)} \Bigg|_{\substack{forma\ \ de\ \ la \\ respuesta}}$$

Hallando coeficientes

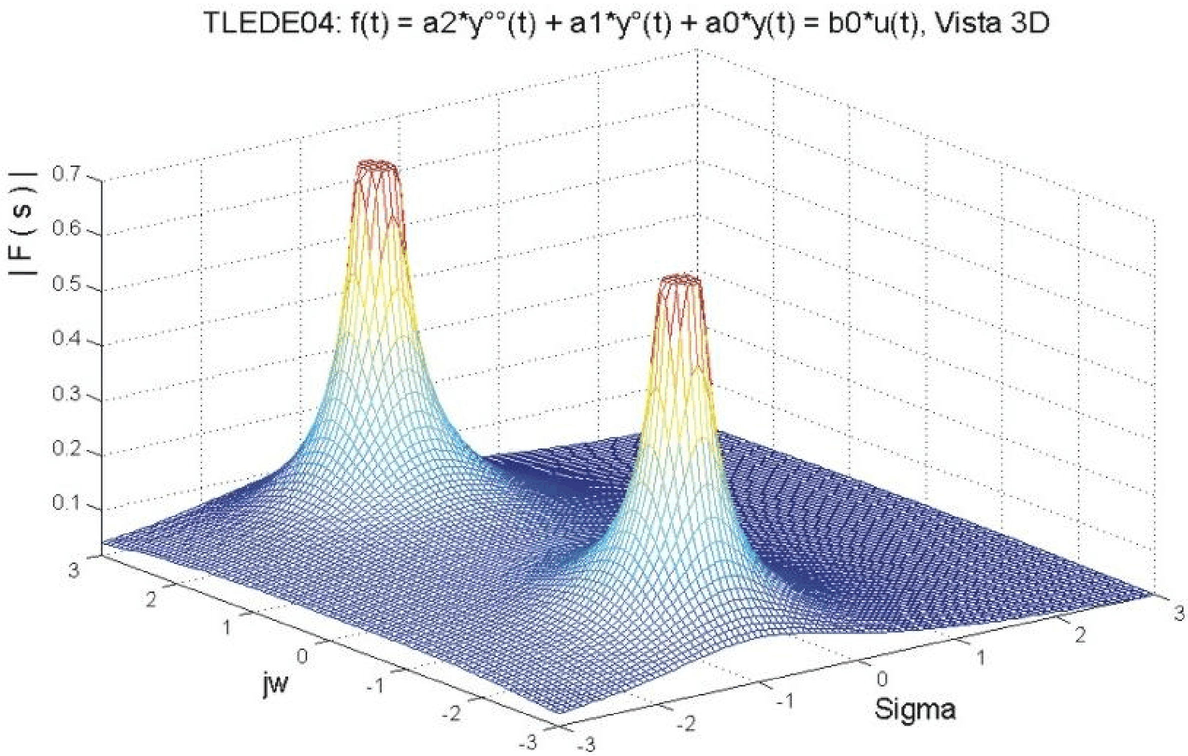
$$M\angle\varphi = \left\{Y_L(s)\cdot\left[(S+1)^2 + 2^2\right]\right\}_{S=-1+j2} = \left\{\tfrac{1}{2}\right\}_{S=-1+j2} = \tfrac{1}{2}$$

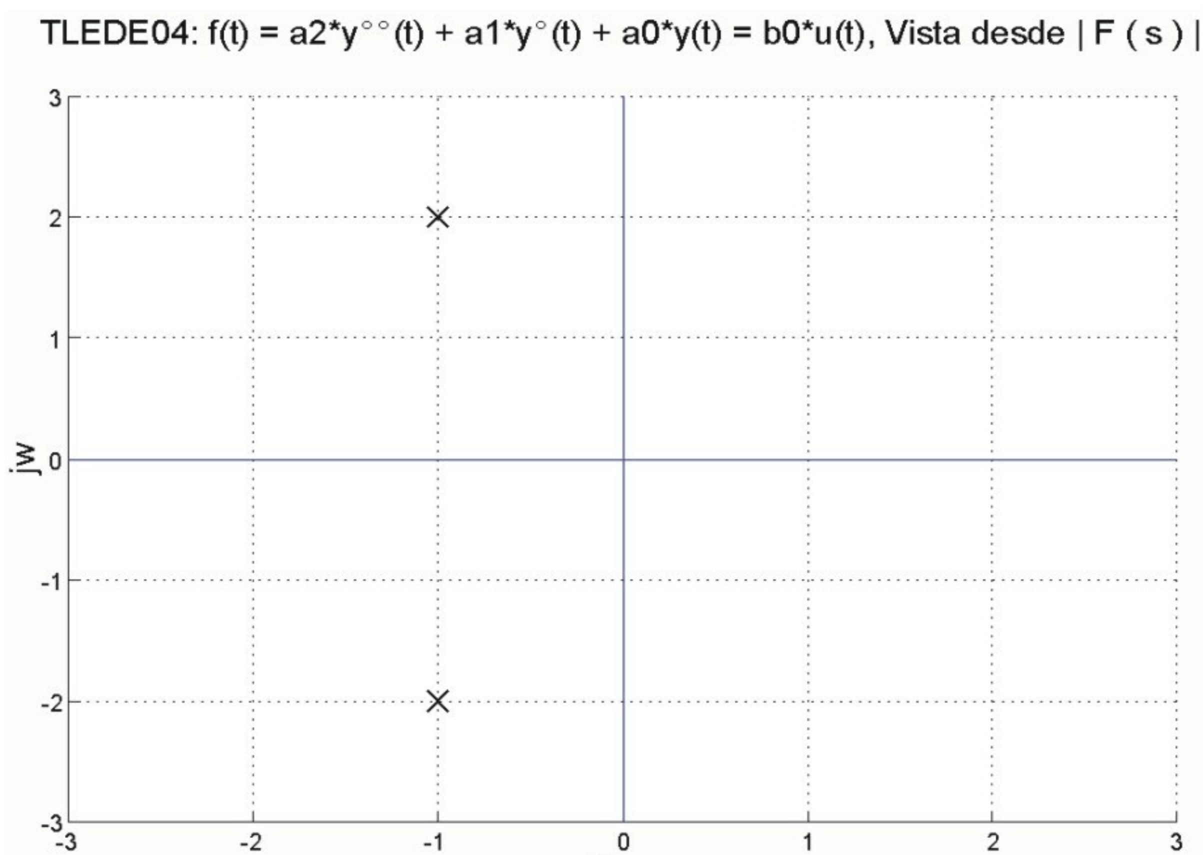
$$\underline{M\angle\varphi = \tfrac{1}{2}\angle 0}$$

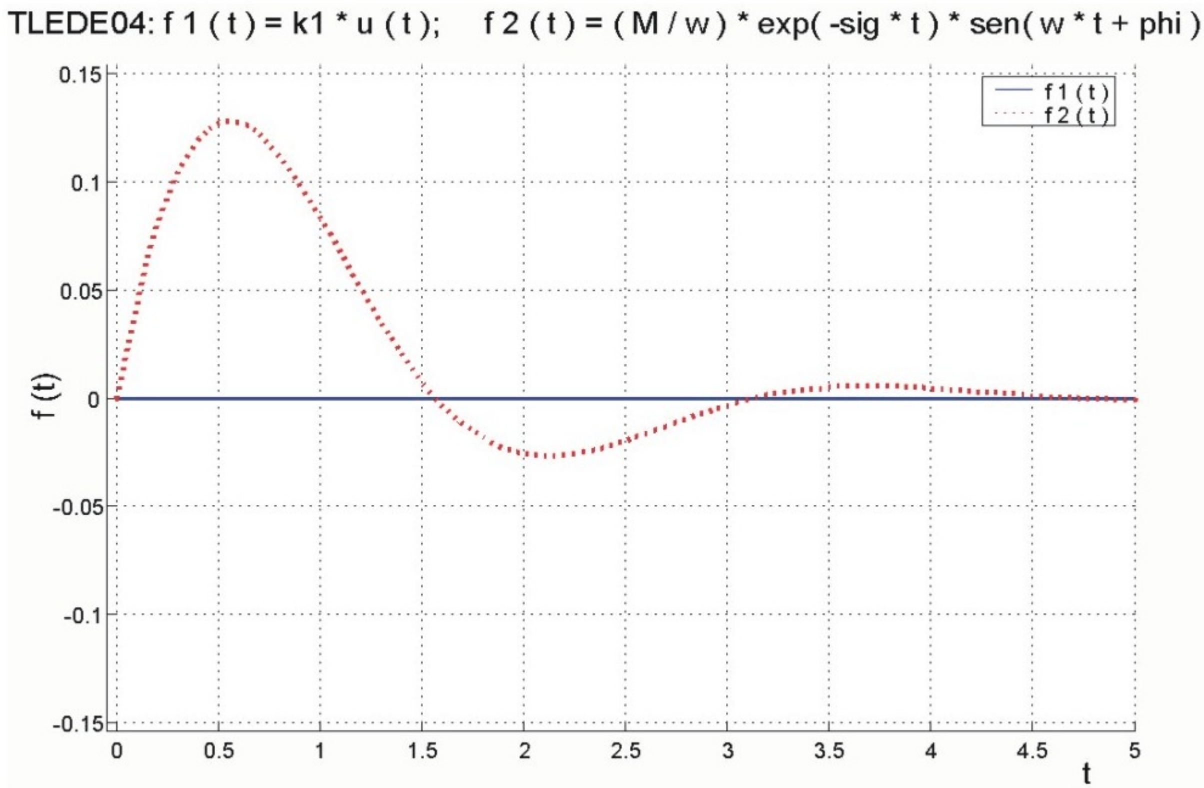
Sustituyendo en la forma de la respuesta

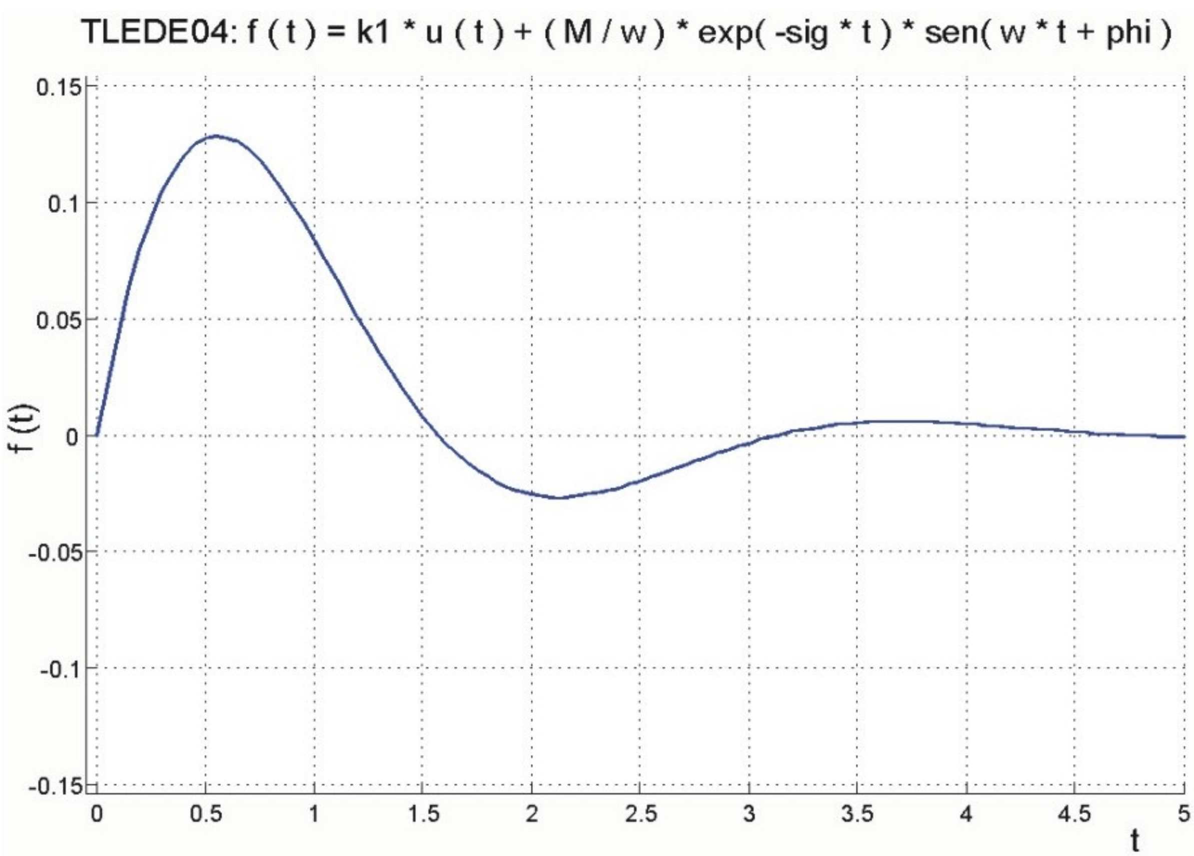
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_L(s)\right\} = y_L(t) = \frac{1}{4}e^{-t}sen(2\cdot t)$$

$$\underline{\underline{\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_L(s)\right\} = y_L(t) = 0.25e^{-t}sen(2t)}}$$


TLEDE04: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista 3D
| F (s) |
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
jw
Sigma
3
2
1
0
-1
-2
-3


TLEDE04: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista desde | F (s) |
jw
Sigma
3
2
1
0
-1
-2
-3


TLEDE04: f 1 (t) = k1 * u (t); f 2 (t) = (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f 1 (t)
f 2 (t)
f (t)
t
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


TLEDE04: f (t) = k1 * u (t) + (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f (t)
t
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Ejercicio: **TLEDE05**

Halle la respuesta forzada de la siguiente ecuación diferencial por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades.

$$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=x(t) \;\; con \;\; x(t)=u(t); \;\; y(0)=0; \;\; y'(0)=\tfrac{1}{2}$$

Solución:

Aplicando Transformada Directa de Laplace y considerando que todas las condiciones iniciales son cero

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)+2y'(t)+5y(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\}+2\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\}+5\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}$$

$$\left\{S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)\right\}+2\left\{SY(s)-y(0)\right\}+5\left\{Y(s)\right\}=\left\{\frac{1}{S}\right\}$$

$$S^2Y(s)+2SY(s)+5Y(s)=\frac{1}{S}$$

$$Y(s)\left[S^2+2S+5\right]=\frac{1}{S}$$

$$Y(s)=\frac{1}{S\left[S^2+2S+5\right]} \Rightarrow \underline{Y_F(s)=\frac{1}{S\left[S^2+2S+5\right]}}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_F(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S\left[S^2+2S+5\right]}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S(S+1+2j)(S+1-2j)}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y_F(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S\left[(S+1)^2+2^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y_F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{S} + \frac{M\angle\varphi}{\left[(S+1)^2 + 2^2\right]}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{S}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M\angle\varphi}{\left[(S+1)^2 + 2^2\right]}\right\}$$

$$\underline{\mathscr{L}^{-1}\{Y_F(s)\} = y_F(t) = k_1 u(t) + \frac{M}{2}e^{-1\cdot t}sen\left(2\cdot t + \varphi\right)}\ \Bigg|_{\substack{forma\ de\ la\\ respuesta}}$$

Hallando coeficientes

$$k_1 = \left\{Y_F(s)\cdot S\right\}_{S=0} = \left\{\frac{1}{\left(S^2 + 2S + 5\right)}\right\}_{S=0} = \underline{\frac{1}{5} = 0.2 = k_1}$$

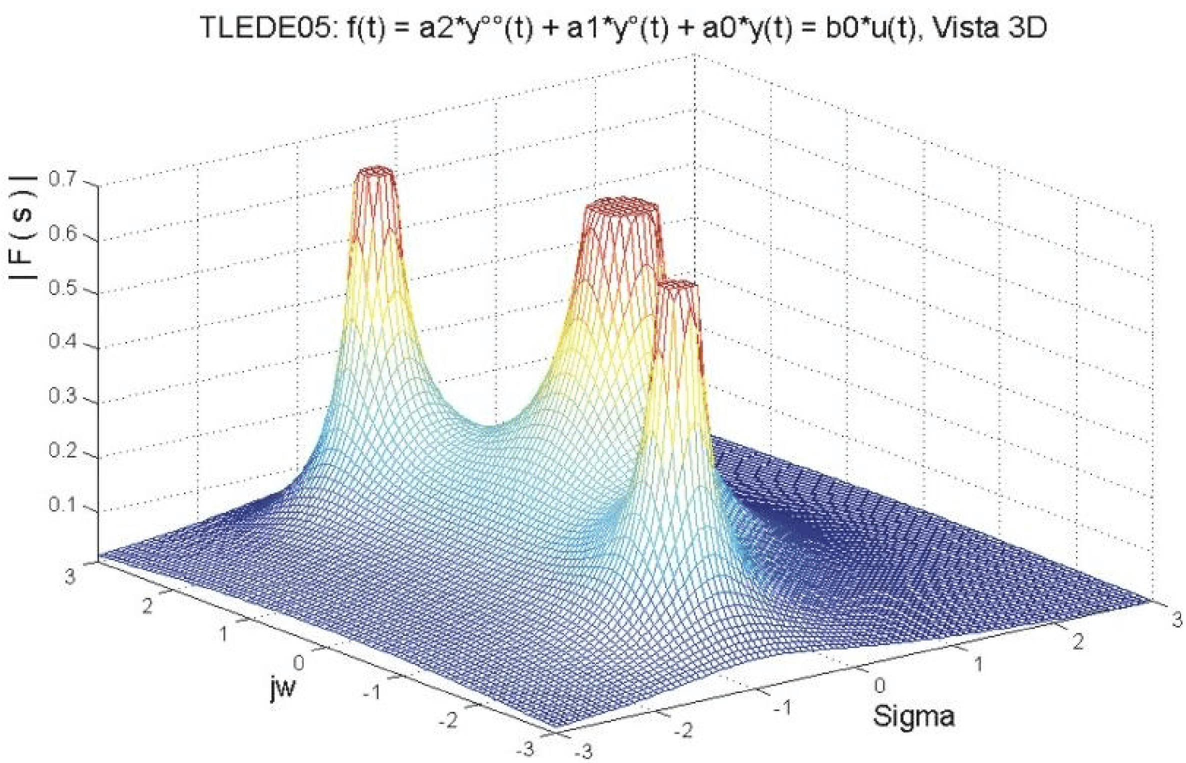
$$M\angle\varphi = \left\{Y_F(s)\cdot\left[(S+1)^2 + 2^2\right]\right\}_{S=-1+j2} = \left\{\frac{1}{S}\right\}_{S=-1+j2} = \frac{1}{-1+2j}$$

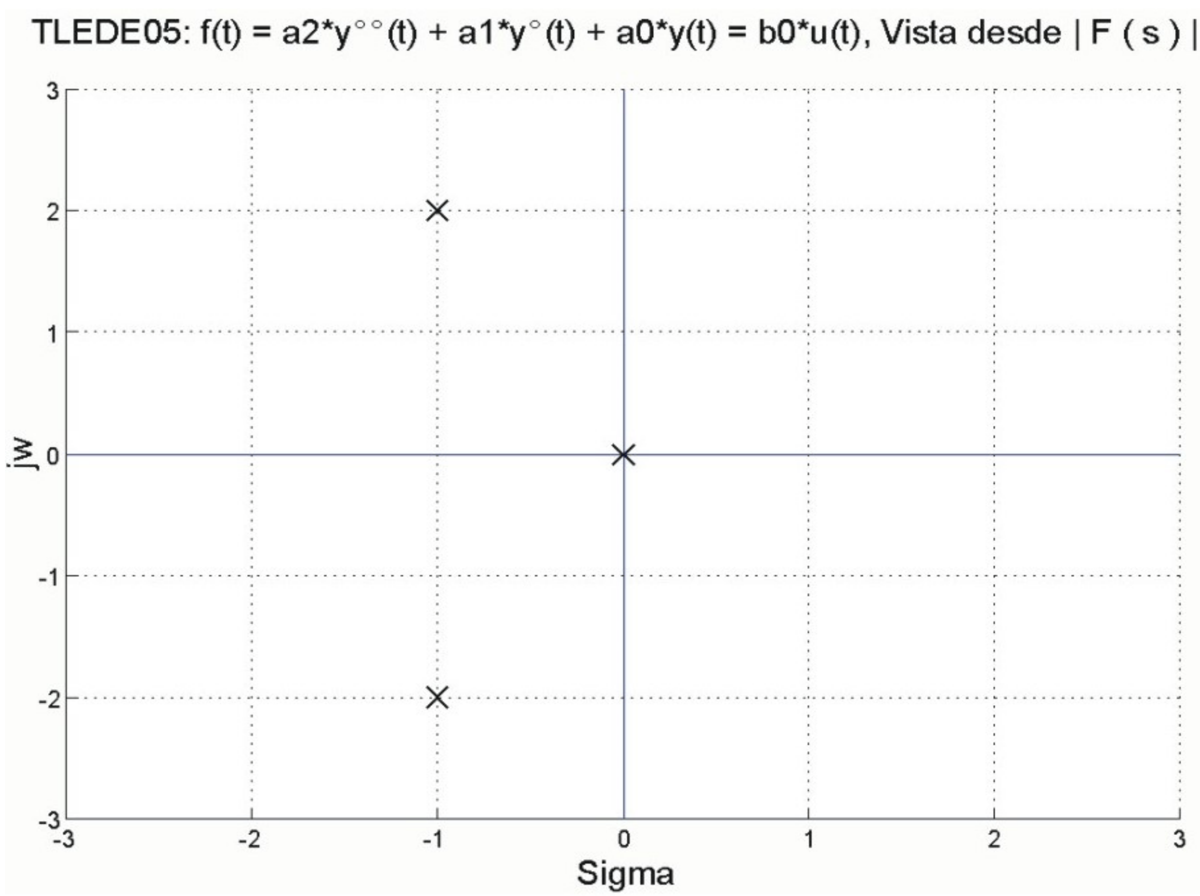
$$M\angle\varphi = -0.2 - 0.4j = \underline{0.447\angle -2.034 = M\angle\varphi}$$

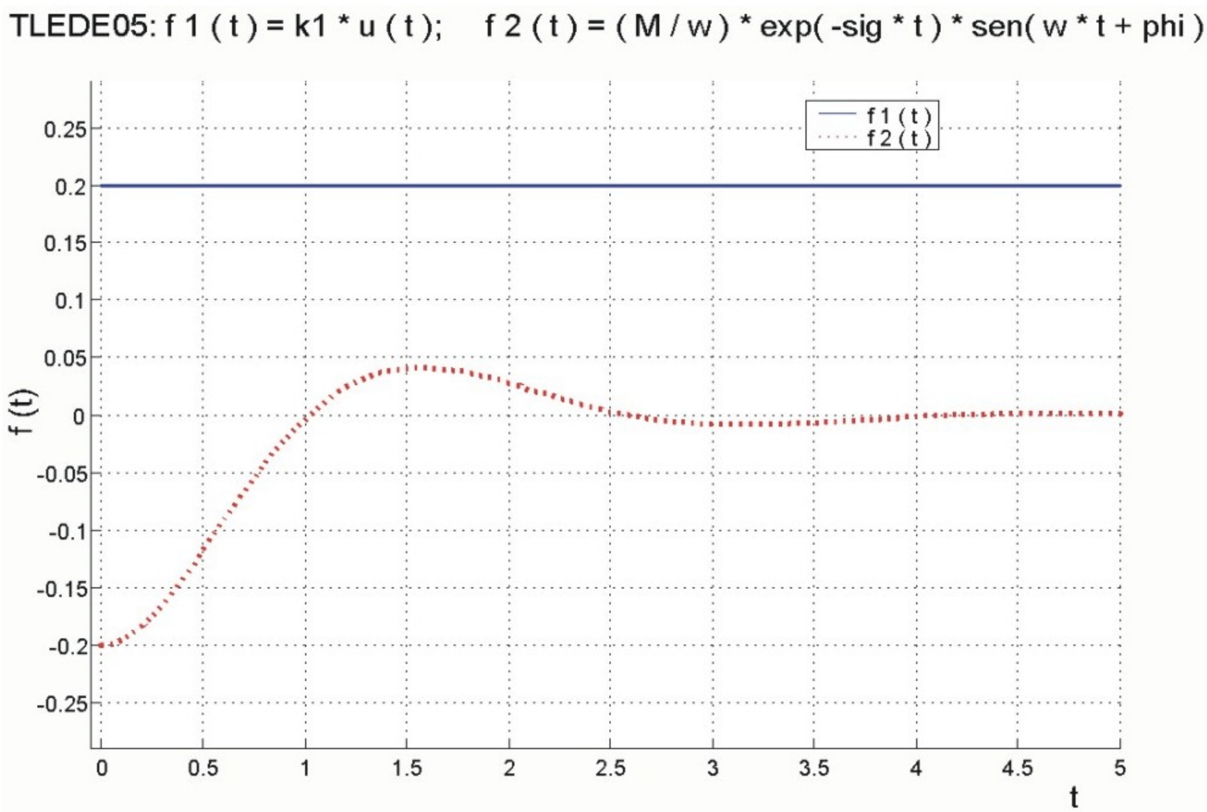
Sustituyendo en la forma de la respuesta

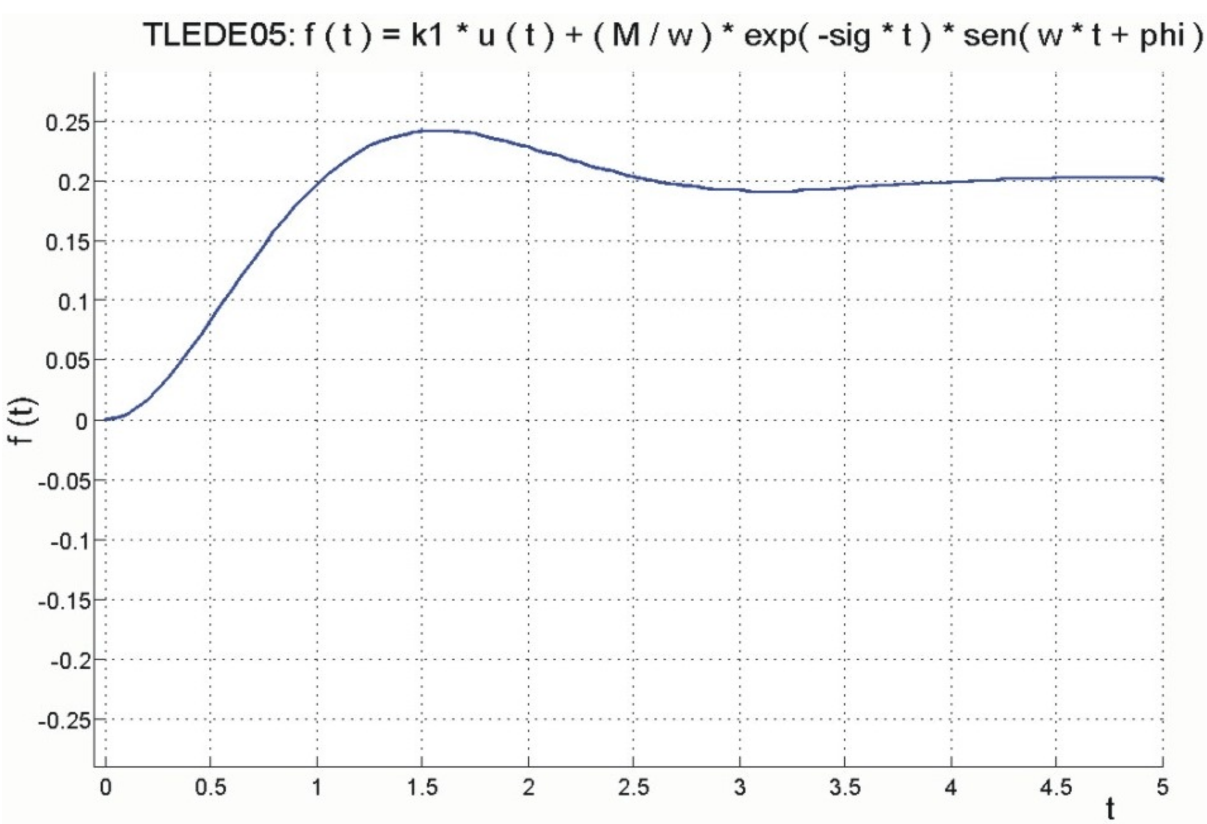
$$\mathscr{L}^{-1}\{Y_F(s)\} = y_F(t) = 0.2u(t) + \frac{0.447}{2}e^{-t}sen(2\cdot t - 2.034)$$

$$\underline{\underline{\mathscr{L}^{-1}\{Y_F(s)\} = y_F(t) = 0.2u(t) + 0.2235\cdot e^{-t}sen(2\cdot t - 2.034)}}$$


TLEDE05: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista 3D
| F (s) |
jw
Sigma


TLEDE05: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista desde | F (s) |
jw
Sigma


TLEDE05: f 1 (t) = k1 * u (t);   f 2 (t) = (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f 1 (t)
f 2 (t)
f (t)
t
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


TLEDE05: f (t) = k1 * u (t) + (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)
f (t)
t
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Ejercicio: **TLEDE06**

Demostración de que la respuesta total es la suma de la respuesta libre con la respuesta forzada.

$$y_T(t) = 0.2u(t) + 0.25e^{-t} sen(2t - 0.9273)$$
$$y_T(t) = 0.2u(t) + 0.25e^{-t}\left[sen(2t)\cdot\cos(0.9273) - \cos(2t)\cdot sen(0.9273)\right]$$
$$y_T(t) = 0.2u(t) + 0.25\cdot\cos(0.9273)\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) - 0.25\cdot sen(0.9273)\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)$$
$$y_T(t) = 0.2u(t) + 0.15\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) - 0.1999\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)$$

$$\underline{y_T(t) = 0.2u(t) + 0.15\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) - 0.2\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)}$$

$$\underline{y_L(t) = 0.25\cdot e^{-t}\cdot sen(2t)}$$

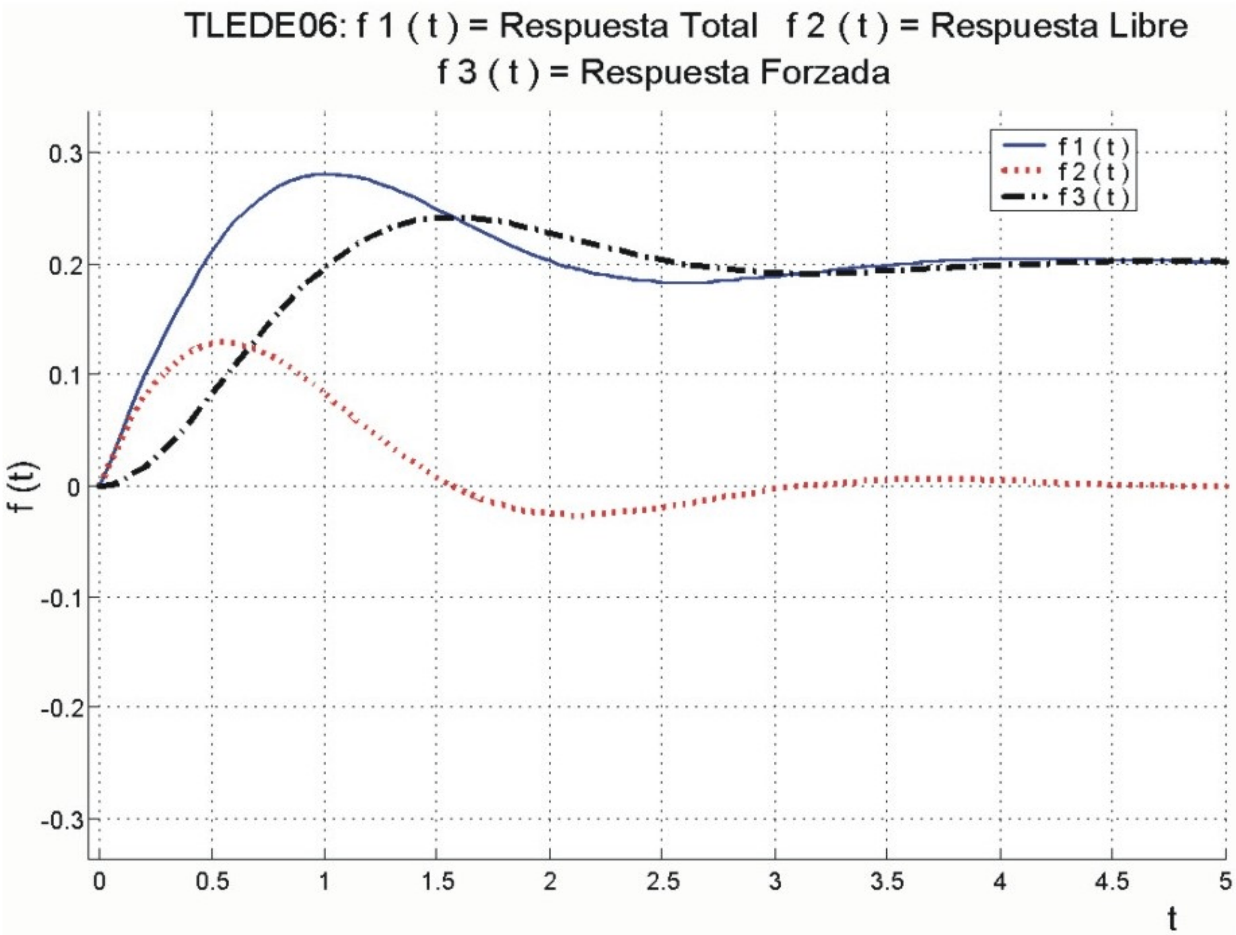
$$y_F(t) = 0.2u(t) + 0.2235e^{-t} sen(2t - 2.034)$$
$$y_F(t) = 0.2u(t) + 0.2235e^{-t}\left[sen(2t)\cdot\cos(2.034) - \cos(2t)\cdot sen(2.034)\right]$$
$$y_F(t) = 0.2u(t) + 0.2235\cdot\cos(2.034)\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) - 0.2235\cdot sen(2.034)\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)$$
$$y_F(t) = 0.2u(t) - 0.099863\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) + 0.199949\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)$$

$$\underline{y_F(t) = 0.2u(t) - 0.1\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) + 0.2\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)}$$

$$y_T(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

$$y_T(t) = 0.25\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) + \left[0.2u(t) - 0.1\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) + 0.2\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)\right]$$
$$y_T(t) = 0.25\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) + 0.2u(t) - 0.1\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) + 0.2\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)$$
$$y_T(t) = 0.2u(t) + 0.25\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) - 0.1\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) + 0.2\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)$$

$$\underline{\underline{y_T(t) = 0.2u(t) + 0.15\cdot e^{-t}\cdot sen(2t) - 0.2\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t)}}$$


TLEDE06: f 1 (t) = Respuesta Total   f 2 (t) = Respuesta Libre
f 3 (t) = Respuesta Forzada
f 1 (t)
f 2 (t)
f 3 (t)
f (t)
t
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Ejercicio: **TLEDE07**

Halle la función de transferencia de la siguiente ecuación diferencial por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades.

$$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=x(t) \;\; con \;\; x(t)=u(t); \;\; y(0)=0; \;\; y'(0)=1/2$$

Solución:

Aplicando Transformada Directa de Laplace y la condición de que la Función de transferencia se halla para todas las condiciones iniciales iguales a cero y sin sustituir a X(s) por su transformación

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)+2y'(t)+5y(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\}+2\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\}+5\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}=\left\{X(s)\right\}$$

$$\left\{S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)\right\}+2\left\{SY(s)-y(0)\right\}+5\left\{Y(s)\right\}=X(s)$$

$$S^2Y(s)+2SY(s)+5Y(s)=X(s)$$

$$Y(s)\left[S^2+2S+5\right]=X(s)$$

$$Y(s)=\frac{X(s)}{\left[S^2+2S+5\right]} \Rightarrow \underline{F(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{\left[S^2+2S+5\right]}}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left[S^2+2S+5\right]}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1+2j)(S+1-2j)}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left[(S+1)^2+2^2\right]}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M\angle\varphi}{\left[(S+1)^2+2^2\right]}\right\}$$

$$\underline{\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{M}{2}e^{-1\cdot t}sen(2\cdot t+\varphi)}\ \Bigg|_{\substack{forma\ de\ la\\ respuesta}}$$

Hallando coeficientes

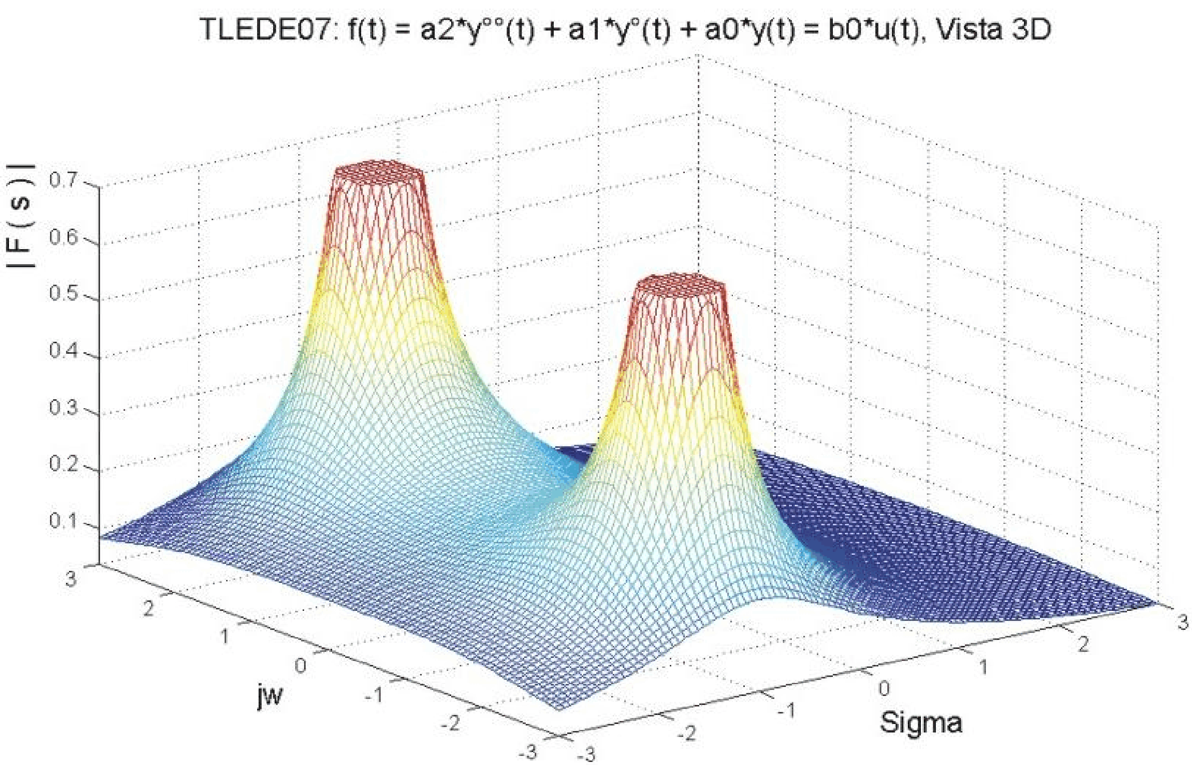
$$M\angle\varphi = \left\{F(s)\cdot\left[(S+1)^2+2^2\right]\right\}_{S=-1+j2} = \{1\}_{S=-1+j2} = 1$$

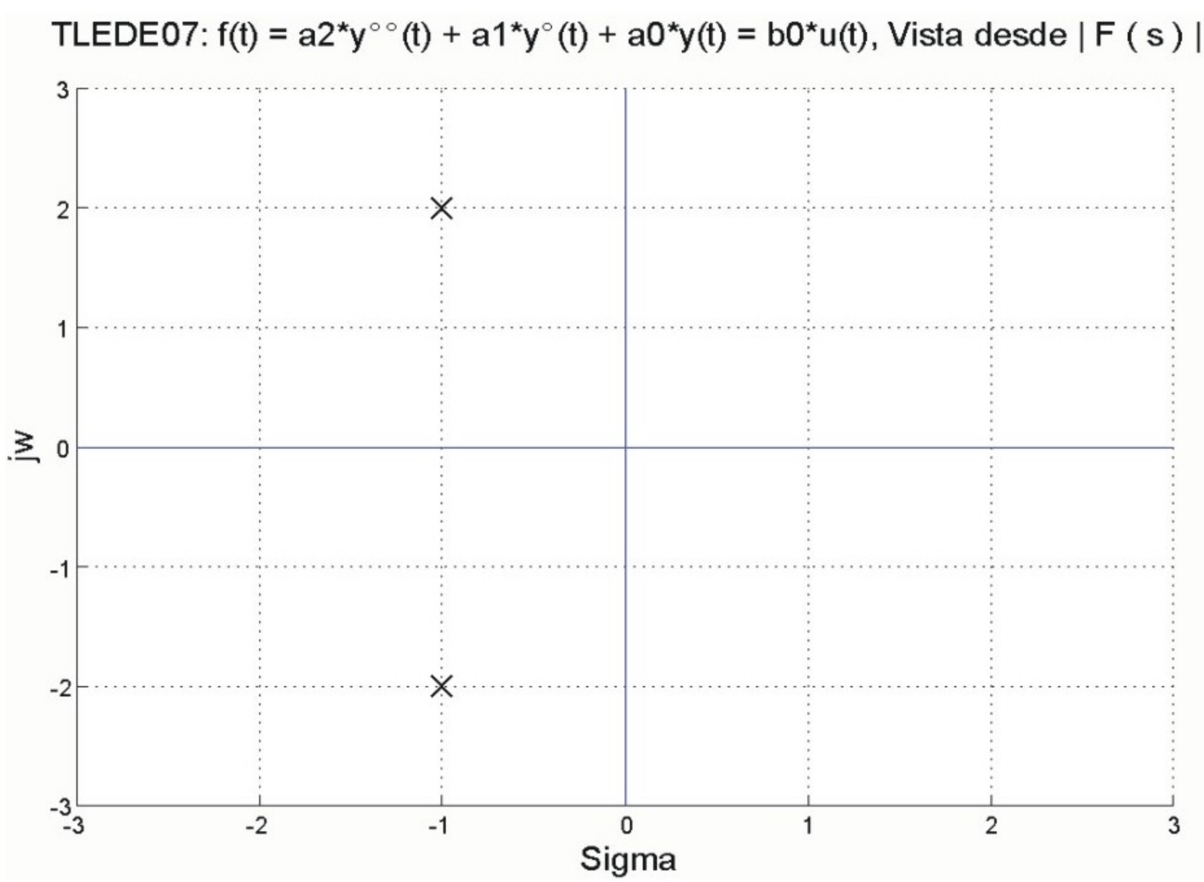
$$\underline{M\angle\varphi = 1\angle 0}$$

Sustituyendo en la forma de la respuesta

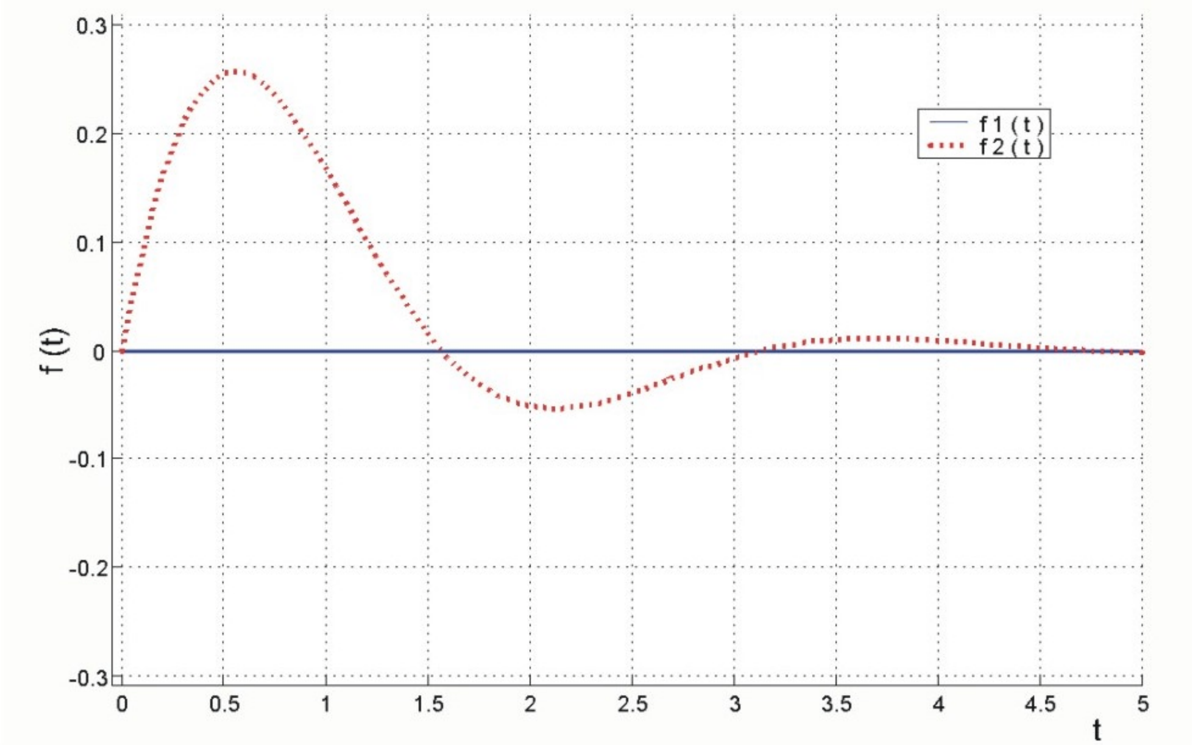
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}sen(2\cdot t)$$

$$\underline{\underline{\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 0.5e^{-t}sen(2t)}}$$


TLEDE07: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista 3D
| F (s) |
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
jw
Sigma
3
2
1
0
-1
-2
-3


TLEDE07: f(t) = a2*y°°(t) + a1*y°(t) + a0*y(t) = b0*u(t), Vista desde | F (s) |
jw
Sigma
3
2
1
0
-1
-2
-3

TLEDE07: f 1 (t) = k1 * u (t);   f 2 (t) = (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)



TLEDE07: f (t) = k1 * u (t) + (M / w) * exp(-sig * t) * sen(w * t + phi)